カオス系の状態密度と量子化条件

名大　教養　高塚和夫

I. 序

現在、ハミルトン系のカオスの研究において、その量子化が非常に重要な理論的課題として注目されている。カオス系は、どのような物理的機構で量子化され、どのような数学的手続きで「離散」エネルギーが計算されるのか。量子カオスの解析的な研究と、量子カオスによる統計力学とダイナミックスの関係付けの試み、及び量子化条件の存在の可能性について報告する。

II. 状態密度 [1]

Gutzwiller にならって、次に定義される状態密度を量子化する。

$$D(E) \equiv Tr\,\delta(E-H) = \sum_i \delta(E-E_i) = (2\pi\hbar)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dq \langle q | e^{-iHt/\hbar} | q \rangle e^{iEt/\hbar}. \qquad (1)$$

ここで、上式の積分核の部分を位相空間経路積分に基づく半古典表示[2]に置き換えこの式を評価する。ここまでで次の事が分かった：
(1)古典力学的カオスの局所的発生の判定条件に使われるリアプノフ指数と、大局的発生の判定条件に使われるグリーンのresidue（留数）が上の経路積分の振幅項から自然に出てくる。(2)可積分系の量子化条件（EBK、ボーア、ゾンマーフェルトの条件）に現われるマスロフ指数は、同じく振幅項から発生する量子位相により与えられる。この量子位相は、古典軌跡に沿って移動する位相空間内での微小体積素片が自転（スピン）することにより発生する。(3)Gutzwiller が発見したように、周回軌道（元の位置に同じ運動量で戻ってくる古典軌道）だけが積分に寄与する。

カオス系に対して、(1)式は次のように評価された：

$$D(E)=\sum_{\alpha}\frac{T_\alpha}{2\pi}\sum_{M=-\infty}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}$$

$$\left[\frac{i}{W_\alpha-\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)d_k^\alpha-2\pi M\hbar+i\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)|c_k^\alpha|}\right.\tag{2}$$

$$\left.-\frac{i}{W_\alpha-\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)d_k^\alpha-2\pi M\hbar-i\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)|c_k^\alpha|}\right]$$

ここで、αはエネルギーEをもつ周回軌道を指定し、Wは簡約された作用積分、dとcはその不安定性指数の実部と虚部、Tは周期、mとMは「量子数」をそれぞれ表す。(2)式は直ちに、Wを変数とするローレンツ型に書き換えることができる。一方、D(E)は、複素エネルギー面上だけに極を持つように見える。

III.量子カオスの熱力学的特徴付け[1]

(2)式の状態密度は、複素平面上で

$$W_\alpha(E_*)=\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)d_k^\alpha-2\pi M\hbar-i\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)|c_k^\alpha|,\tag{3}$$

に極を持つ。一方、良く知られた恒等式

$$\frac{\partial W}{\partial E}=t\tag{4a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial E}=k\beta=\frac{1}{\mathbb{T}}.\tag{4b}$$

を思いだす。ここで、W とS は各々、簡約された作用積分と熱力学的エントロピー。$\mathbb{T}$ は温度。(4)式のアナロジーから(3)の複素作用は、エネルギー微分により、複素時間を発生させる。一方、虚数時間と温度は$t_{imag}=-i\hbar\beta$ の関係で与えられるから、結局、(3)式の周回軌道のエントロピーと温度を次の様に形式的に求めることができる:

$$S_\alpha = -\frac{k}{\hbar} Im\,[W_\alpha(E_*)] = k \sum_{k=1} |c_k^\alpha|/2. \qquad (5)$$

$$\beta_\alpha = \frac{\partial}{\partial E} \sum_{k=1} |c_k^\alpha|/2. \qquad (6)$$

但し、ここで、周回軌道に垂直方向の「量子数」を全て零とおいた。この物理的意味の解釈は、省略する。

IV.量子化条件の試み[3]

(2)式の状態密度式は、Gutzwillerとは全く別の方法で得たものである。その結果分かったことは、(i)(2)式の状態密度は、Gutzwillerの拡張になっている事、(ii)それにも拘わらず、実エネルギー軸上に極を持たない事、の2点である。第2の重要な欠点は、Gutzwillerもわれわれも基本的に停留位相近似（以下SPA)を使っている事に由来する。一方、SPAは、理論に周回軌道を持ち込む。(1)式に使われるFeynmanの積分核

$$K(q_f,q_i;t) = \sum_\gamma A_\gamma(q_f,q_i;t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_\gamma(q_f,q_i;t)\right) \qquad (7)$$

において、滑らかなトーラスが存在する可積分系で(7)の振幅項A_γを位相停留点で定数扱いにするのは構わないが、激しい不安定軌道がもつれるように重なるカオス状態ではそれが許されるだろうか。

ここでは、それが許されないと仮定する。すると、周回軌道近似も見直さなければならない。しかし、プランク定数が小さい事は事実であるし、それ以外にも幾つかの数値実験的な事実を考慮すると、周回軌道近似が全面的に悪いとは考えられない。そこで、(2)式やGutzwiller理論で得られた様に、全ての周回軌道が必要とされる訳ではなく、「特定の条件を満たす一部の周回軌道のエネルギーの近傍に、量子化されるべきエネルギーが存在する」と考える。ところで、周回軌道の連続集合は、エネルギーをパラメータとする族（曲面）を位相空間につくる。そこで、(2)式の分母を、この周回軌道曲面の外側へ、出て行くように接続し、それが零点を持つ点を（近似的に）探す。結果は、以下のとおりである。それ以外の周回軌道は、捨ててしまう。

(i)量子化条件

次の量子化条件を満たす周回軌道の近くに量子化されるべきエネルギーが見つかる；

$$\left\{W_\alpha^0-\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)d_k^{\alpha\,0}-2\pi M\hbar\right\}\left\{2\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)\beta_k^\alpha\right\}$$

$$-\left\{T_\alpha-\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)\Delta_k^\alpha\right\}\left\{\hbar\sum_{k=1}^{N}\left(m_k+\frac{1}{2}\right)\left|c_k^{\alpha\,0}\right|\right\}=0 \qquad (8)$$

ここで、Δ_k^αは、d_k^αのエネルギー微分（但し、上の幾何学的条件のもとで。また、それ以外の記号については既出。）この量子化条件は、安定系では、通常の（共鳴型）量子化条件に帰着されEBK条件に関係付けられる。(8)は、「量子数」について２次なので、周回軌道に垂直方向の「量子数」を全て零とおくと、次のように線形化される。

$$W_\alpha^0-\hbar\left(m_1+\frac{1}{2}\right)d_1^{\alpha\,0}-2\pi M\hbar-\frac{\hbar}{2}\sum_{k\geq2}^{N}d_k^{\alpha\,0}$$

$$-\frac{\left\{T_\alpha-\frac{\hbar}{2}\sum_{k\geq1}^{N}\Delta_k^\alpha\right\}\left\{\sum_{k\geq2}^{N}\left|c_k^{\alpha\,0}\right|\right\}}{2\sum_{k\geq2}^{N}\beta_k^\alpha}=0 \qquad (9)$$

(ii)量子化エネルギー

量子化されるエネルギーは、上の周回軌道のエネルギーE_α^0から少しずれた所にあり

$$E_\alpha=E_\alpha^0-\mathbb{T}_\alpha S_\alpha \qquad (10)$$

と与えられる。エネルギーシフトの$\mathbb{T}_\alpha$やS_αはIII節のダイナミカルな温度とエントロピーである。(10)は、ヘルムホルツの自由エネルギーと同型をしており、周回軌道の周りの不安定性による散逸的性質を反映している。量子カオスと熱統計力学が深い所で理論上の平行な関係にあることは、興味深い。

V. 終りに

ここで考えた、量子化条件は幾何学的な考察だけで出来上がっており、近似を高めていくという方法をとっていない。今後、その方面の研究と比較していく必要がある。いずれにしても、筆者の知るかぎり、閉じた形の「カオスのための量子化条件」はこれ以外に提案されていないように思う。

[1]K. Takatsuka, Phys. Rev. A, accepted for publication (1992).
[2]K. Takatsuka, Phys. Rev. Lett. **61**, 503 (1988); Phys. Rev. **A39**, 5961 (1989).
[3]K. Takatsuka, to be published.